**基于力法的钢结构框架柱二阶效应分析[[1]](#footnote-0)**

樊长军1，李国华2

1. 山西水利职业技术学院建筑工程系，山西省运城 044004；
2. 北京建筑大学土木与交通工程学院，北京，100044)

**摘要：**框架柱的二阶效应是在多层及高层钢结构框架设计中考虑的一个因素，在以往文献中对于结构二阶效应的阐述一般是通过严谨的数学力学推导得出精确的杆件变形曲线方程，再通过杆件变形曲线与内力之间的微分方程得出杆件的整体刚度矩阵。这样得出的刚度矩阵往往是非线性超越方程，求解比较困难，且不易划分整体二阶效应和局部二阶效应。根据杆件一阶分析的弹性变形曲线，利用结构力学最基础的力法求解结构的二阶整体刚度矩阵；在此基础上,将几何刚度矩阵划分为两部分,进一步分析杆件在轴压力作用下的整体二阶效应（*P-∆*效应）和局部二阶效应（*P-δ*效应）。采用力法获得框架柱二阶刚度矩阵的方法，有利于初学者对二阶效应的理解，有利于设计者对结构规范的理解。

**关键词；**二阶效应；力法；几何刚度矩阵；*P-∆*效应；*P-δ*效应

**中图分类号：TU322** **文献标识码：**A **文章编号：**

**Research on the second-order effect of steel frame column**

**based on the flexibility method**

FAN Changjun1 LI Guo-hua2

(1.Department of Civil engineering, Shanxi Conservancy Technical Institute, Shanxi 044004, P.R.China

2. School of Civil and Transportation engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 1100044,P.R. China)

**Abstract:** The second-order effect of frame column is one of the factor of multi-layer and high-rise steel frame. The second-order effect of columns was embodied in the geometric stiffness matrix, which derived by the meticulous differential function between deflection and internal-force. And the differential function was provided by the rigorous mathematical and mechanical derivation in previous literature, therefore, the stiffness of structure is nonlinear transcendental equation ordinarily, troubling in resolving, and difficult on distinguishing between the global second-order effect and local second-order effect. The paper derived the second-order stiffness matrix of column using flexibility method, which based on the first-order elastic deflection curve. The global second-order effect, *P-∆ effect,* and local second-order effect ,*P-δ effect,* under the axial force was studied further, through dividing the geometric stiffness matrix into two part. The procedure of derivation make the better of understanding on the second-order effect and the design code for the beginners and designers.

**Keywords：**second-order effect; flexibility method; geometric stiffness matrix; *P-∆ effect*; *P-δ effect*

一般的结构分析是以一阶分析为基础的，即结构的平衡方程建立在未变形的结构体系之上。当结构构件存在较大轴压力时，如多层或高层框架结构的框架柱，一阶分析的结果将存在较大的误差，使结构分析的内力偏小，偏于不安全。我国规范对结构是否考虑二阶效应有明确的规定[1][2]，当框架柱存在较大轴力时，需要考虑结构构件的二阶效应

在传统的二阶效应分析中,对于结构杆件来说，结构二阶效应分析一般是以构件变形后内力与变形的微分方程为基础，通过求解微分方程得出杆件的变形曲线方程，然后通过变形与内力之间的数学关系得出结构的内力值，从而建立杆端内力与杆端位移的数学关系[3][4][5]。这种方法建立的方程是超越方程，求解过程复杂。本文以传统结构力学力法为基础，近似采用杆件一阶分析下的变形曲线，建立二阶效应下杆端力与杆端位移之间的关系。通过将轴压力*P*作用产生的弯矩的进一步分解，说明整体二阶效应（*P-Δ*）和局部二阶效应（*P*-*δ*）效应的含义。本文提出的方法虽然分析存在一定的近似性，但是对于理解结构构件的二阶效应有一定的直观性。

# **一、基于力法的框架柱二阶弯曲刚度分析**

## **1.1正负号规定及一阶分析的弹性变形曲线方程**

框架柱*AB*坐标系如图1*a*所示，框架柱两端弯矩和转角以顺时针方向为正，杆端剪力和位移与*y*方向相同为正。一阶弹性分析时，根据能量法并采用三次抛物线插值函数得到的杆件变形方程[4]为：

 （1）

其中表示杆件*A*端的水平位移和转角位移,表示杆件*B*端的水平位移和转角位移。



 (*a*)框架柱 (*b*) A端产生位移*v*1 (*c*)A端产生位转角*θ*1 (*d*) B端产生位移*v*2 (*e*)B端产生位转角*θ*2

图1 框架柱力法基本体系

将框架梁视为两端固定的超静定梁，并把框架柱两端位移进行分解为*A*端单独产生横向位移（图1*b*）、*A*端单独产生转角（图1*c*）、*B*端单独产生横向位移（图1*d*）及*B*端单独产生转角（图1*e*）四种情况，然后分别对各种情况进行分析。

## **1.2 *A*端产生已知水平位移的分析**

采用力法求解单跨超静定梁，取悬臂梁作为基本体系（图2*b*），将*A*端剪力和杆端弯矩视为多余未知力，并分别绘制基本结构在作用下的弯矩图（图2*c*）和作用下的弯矩图（图2*d*）。采用图乘法计算得到杆件在作用*A*点产生的水平位移和转角分别，；在作用下*A*点发生的水平位移和转角位移分别为，。



(*a*)框架柱 (*b*) 力法基本体系 (*c*) 图 (*d*) 图 (*e*)图

图2 力法基本体系及弯矩图

当框架柱*A*端产生已知水平位移*v*1时，杆件在*P*作用下，任意截面的的弯矩方程为

 （2）

从上式可知，弯矩为三次抛物线（图2*e*），根据单位力法计算杆件在外荷载*P*作用下，*A*点产生的转角位移和水平位移分别为：

 (3)

则力法方程为

 （4）

求解力法方程（4），得到*A*端剪力和弯矩；根据力的平衡方程可得到*B*端剪力和弯矩：

* *  （5）

用矩阵形式表达上式，并将刚度矩阵分解为两部分：

 （6）

其中部分为框架柱*A*端产生单位位移*v*1=1时，杆件一阶分析得到的结构抗弯刚度系数；部分为框架柱*A*端产生单位位移*v*1=1时杆件的几何刚度系数，反映了当杆件产生不可忽视的变形时，轴压力*P*对结构刚度的影响。

## 1.3 *A*端产生已知转角位移的分析

当杆端*A*产生已知位移****时，在荷载*P*作用下杆件任意截面的弯矩为：

 （7）

积分求解力法自由项****和**：**

 （8）

力法方程为：

 （10）

求解方程得到*A*端产生转角位移时框架柱*A*、*B*两端的剪力和弯矩：

  （11）

利用结构结构对称性或反力互等定理，可以得到当框架柱*B*端分别产生已知位移****,****时，框架柱*AB*两端的剪力和弯矩。将以上的分析结果采用矩阵形式表达为：

 （12）

从上式可以看出，基于力法得到的考虑轴向荷载影响的刚度矩阵与能量法得到的刚度矩阵[4][7]形式一致。其中*K*1为杆件的一阶抗弯刚度系数矩阵，*K*2为杆件的几何刚度矩阵，是二阶刚度系数矩阵，反映了轴压力*P*对结构刚度的影响。杆件轴力以压力为正，即构件存在轴向压力时，杆件的刚度减小；当杆件存在轴拉力时，杆件的刚度增加。

# 二、 几何刚度矩阵探讨

以*A*端发生*v*1水平位移为例，将基本结构在*P*作用下的弯矩（图3*a*）分解为两部分：一部分为三角部分记为*m*(*x*)11，该部分弯矩为*A*端发生水平位移*v*1时，杆件不产生局部变形时产生的弯矩（图3*b*）；另一部分记为*m*(*x*)12，为*A*端发生水平位移*v*1后，杆件产生局部变形产生的弯矩（图3*c*）。两部分弯矩*m*(*x*)11和*m*(*x*)12表达式为：

 （13）

 (*a*) 图 (*d*) 图 (*e*) 图

图 3 杆件弯矩图分解

采用图乘法计算两部分弯矩在框架柱*A*、*B*两端产生的水平位移和转角分别为：

  （14）

其中,为框架柱*A*、*B*两端在*m*(*x*)11作用下产生的杆端位移，实际上就是P-∆作用的结果。而，为框架柱*A*、*B*两端在*m*(*x*)12作用下杆端产生的位移，实际上就是*P*-*δ*作用的结果。分别建立框架柱在*m*(*x*)11、*m*(*x*)12单独作用下力法方程，并求解到两种状态下杆端剪力和弯矩。

*m*(*x*)11单独作用时框架柱*A*端的剪力和弯矩：

解得  （15）

*m*(*x*)12单独作用时框架柱*A*端的剪力和弯矩：

解得： （16）

则框架柱*AB*在*A*段竖向荷载*P*作用下*A*端的剪力和弯矩为两种情况的叠加：

 （18）

对框架柱*AB*两端的各种位移情况进行相似分析，得到杆件两端的剪力和弯矩，并用矩阵形式表达，可以得到框架柱AB的几何矩阵为

 （19）

从上式可知，框架柱几何阵可分解为两部分：第一部分是由于杆件整体弯曲即P-∆效应产生的几何刚度系数矩阵，第二部分是由于杆件的局部弯曲产生即P-δ的几何刚度系数矩阵。本文基于力法得到的框架柱考虑二阶效应的几何刚度矩阵与参考文献[7]中几何刚度矩阵相同。

在上述推导过程中，杆件变形曲线方程用的没有考虑轴向荷载*P*作用的下弹性扰度方程，因此分析结果存在一定的误差，若想得到精确的结果，杆件的弹性扰度方程必须采用考虑*P*作用下精确的扰度方程。

另外本文分析杆件是以理想的铅直杆件为基础的弹性分析，并没有考虑在实际中杆件可能存在初始弯曲和荷载偏心，所以实际的*P*-δ效应会小于实际结果。

# 三、结论

本文采用传统的力法推导了考虑轴向荷载影响的刚度矩阵，并对几何矩阵进行了详细分析，通过分析可知：

1. 框架柱轴力对结构刚度存在一定的影响：当框架柱受压时，杆件的刚度减小，相同杆端位移情况下，框架柱两端内力相应减小；当框架柱受拉时，杆件的刚度增加，相同杆端位移情况下，框架柱两端内力相应增加。
2. 几何刚度矩阵可分解由于柱端横向位移引起的几何矩阵与由于杆件弯曲变形引起的几何矩阵。由柱端横向位移引起的几何矩阵可视为结构分析中的*P*-*Δ*效应，而由杆件弯曲变形引起的几何矩阵对应结构分析中的*P*-*δ*效应。
3. 根据本文的分析过程可知，由于框架柱主要以受压为主，因此结构的二阶效应对结构的刚度是一种减弱。

本文推导方法比较简单，有利于初学者对二阶效应的理解。对设计者对规范的理解也有一定帮助。

**参考文献**

1. 中华人民共和国住房和城乡建设部,GB50011-2010,建筑抗震设计规范[S].北京:中国建筑工业出版社，2016.
2. 中华人民共和国住房和城乡建设部,GB50017-2017,钢结构设计标准[S].北京:中国建筑工业出版社，2017.
3. S.P.铁摩辛柯 J.M.盖莱著,张福范译. 弹性稳定理论[M].(第二版).北京:科学出版社,1965,49~124.
4. 陈骥.钢结构弹性稳定理论与设计[M].第五版.北京:科学出版社,2011,79~109.
5. 梁启智.刚架柱的计算长度[J].钢结构研究论文报告选集(第一册),1982.121~140.
6. 吴惠弼.多层钢结构柱的计算长度[J].钢结构,1991,1(13)：35-45.
7. 陈惠发著,陈绥平译. 钢框架稳定设计[M].北京:世界图书出版社,1999,226~261.
8. 陈绍蕃.钢结构稳定设计指南(第三版)[M].北京:中国建筑工业出版社,2013,177~185.
1. 作者简介：樊长军（1975-），男，讲师，硕士，结构抗震研究，E-mail:fch\_750328@163.com

通讯作者：李国华（1974-），女，讲师，博士，结构抗震、防火等方面研究，E-mail:liguohua@bucea.edu.cn [↑](#footnote-ref-0)